1.4. FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS TENSORIAL

Problema 1. Considérense dos sistemas de coordenadas cartesianos: *S* con vectores unitarios $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y *S´* con vectores unitarios $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ donde $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$, $\vec{k}' = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$. El tensor T tiene las siguientes componentes en *S*:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentra sus componentes en *S´*.

<u>Solución:</u>

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Determinar los valores propios y las direcciones de los ejes principales del tensor: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. ***<u>Solución:</u>*** $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$; $\vec{v}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\vec{v}_1 = (1,0,0)$; $\vec{v}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Problema 3. Un tensor cuyas direcciones principales coinciden con los ejes $X_1 X_2 X_3$ transforma el vector unitario $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \sqrt{2}\vec{u}_3)$ en el vector $\vec{v} = (2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \sqrt{2}\vec{u}_3)$. Determinar las componentes del tensor. ***<u>Solución:</u>*** $T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 4. La función U que define un campo escalar viene dada por U = x + 2y, ¿cómo son las superficies equiescalares?

<u>Solución:</u> En el plano, rectas de ecuación $y = \frac{-x}{2} + \frac{k}{2}$, en el espacio, planos de ecuación $x + 2y = k$, siendo *k* una constante.

Problema 5. Un campo escalar queda definido por la función *U = 3x + 1*. Calcular la variación de la función *U* al pasar desde el punto x =1 al punto x = 4 directamente y mediante la utilización del gradiente.
<u>Solución:</u> $\Delta U = 9$

Problema 6. Un campo escalar está definido por la función $U(x, y, z) = 3x^2 y - y^3 z^2$. Hallar el campo vectorial $gr\vec{a}dU$ y particularizar en el punto $P(1,-2,1)$.

<u>Solución</u>: $gr\vec{a}dU(x, y, z) = (6xy, 3x^2 - 3y^2 z^2, -2y^3 z)$; $gr\vec{a}dU(1,-2,1) = (-12,-9,16)$.

Problema 7. Sea el campo escalar plano $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$:

(a) Dibuja dos líneas equiescalares tales que el valor del campo sea cuatro veces mayor en la una que en la otra.

(b) Calcula el campo vectorial $\vec{v} = gr\vec{a}dU$ y la ecuación de la línea campo vectorial que pasa por el punto de coordenadas $(1,2)$.

(c) Calcula la circulación del campo $\vec{v}$ entre los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(2,2)$.

(d) Calcula $div\vec{v}$.

Solución: **b)** $\vec{v} = (x, y) / \ x-1 = \frac{y-2}{2}$; **c)** $C = 4$; **d)** $div\vec{v}(x, y) = 2$.

Problema 8. Calcular el flujo total que atraviesa la superficie de un cubo de lado la unidad cuyo primer lado está situado en *y = 1*en el campo vectorial $\vec{a} = 2y\vec{j}$ mediante la definición de flujo y mediante el teorema de la divergencia. ***Solución:*** $\phi = 2$

Problema 9. Calcúlese el flujo total que atraviesa un cilindro de altura h y radio R en un campo vectorial definido por $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + 6z\vec{k}$. ***Solución:*** $\phi = 6\pi R^2 h$

Problema 10. Hallar el campo divergencia y el campo rotacional del campo vectorial $\vec{v} = x^2 z\vec{i} - 2y^3 z^2 \vec{j} + xy^2 z\vec{k}$ particularizando en el punto $P(1,-1,1)$.

Solución: $div\vec{a}(x, y, z) = 2x - 6y^2 z^2 + xy^2$; $div\vec{a}(1,-1,1) = -3$; $r\vec{o}t\vec{a}(x, y, z) = (2xyz + 4y^3 z, x^2 - y^2 z, 0)$; $r\vec{o}t\vec{a}(1,-1,1) = (-6,0,0)$ **.**

Problema 11. Hallar el campo vectorial derivado del campo escalar $U = xy + 2z^2 + 3x^3 yz$ y calcular la circulación del campo a lo largo de la recta que une los puntos $A(1,2,0)$ y $B(0,3,-1)$.

Solución: $gr\vec{a}dU = (y + 9x^2 yz, x + 3x^3 z, 4z + 3x^3 y)$; *C=0.*

Problema 12. Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{a} = 3xy\vec{i} - 2y^2 \vec{j}$ a lo largo de la trayectoria cerrada definida por los puntos A(1,1), B(2,1), C(2,0), D(0,0). ¿Será conservativa dicha magnitud vectorial? ***Solución:*** $C = \frac{11}{2}$; $\vec{a}$ no es conservativo.

Problema 13. Dado el campo vectorial $\vec{a} = ax^2 y\vec{i} + b(y^2 + xz)\vec{j} + cy^2 senx\vec{k}$ donde a, b y c son constantes. Calcular su circulación a lo largo de la circunferencia $x = 0; y^2 + z^2 = R^2$. ***Solución:*** usando el teorema de Stokes se obtiene $C = 0$.