1. MECÁNICA GENERAL

1.1. CÁLCULO VECTORIAL

a) Repaso operaciones con vectores libres

Problema 1. Encuéntrese un vector unitario en la dirección del vector resultante de la suma de $\vec{a}=(1,-1,-1)$ y $\vec{b}=(2,1,-1)$. ***Solución:*** $\frac{1}{\sqrt{13}}(3,0,-2)$.

Problema 2. Dado el vector $\vec{a}=(1,5,5)$ calcula sus componentes paralela y perpendicular a la dirección dada por el vector unitario $\vec{u}=\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. ***Solución:*** $\vec{a}_{||}=(0,\frac{21}{5},\frac{28}{5})$, $\vec{a}_{\perp}=(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$.

Problema 3. Determínese para que valor de n los vectores $\vec{a}=(1,2,-3)$ y $\vec{b}=(2,1,n)$ son perpendiculares. ***Solución:*** $n=\frac{4}{3}$.

Problema 4. Halla la componente del vector $\vec{a}=(7,5,2)$ en la dirección dada por la recta que une los puntos $P(5,4,3)$ y $Q(2,1,2)$. ***Solución:*** $\vec{a}_{||}=(6,6,2)$.

Problema 5. ¿Qué ángulo forman dos diagonales de un cubo? ***Solución:*** $\alpha=70.52º$.

Problema 6. Demuéstrese que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si. La característica geométrica de un rombo es que sus cuatro lados son iguales.

Problema 7. ¿Qué deben verificar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en cada uno de los casos siguientes?

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ y $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{c}|$

b) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ y $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

Solución: **a)** $\vec{a}\|\vec{b}$ **b)** $\vec{a}\perp\vec{b}$

Problema 8. Indicar y demostrar cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales falsas:

a) Si $\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{c}$ entonces $\vec{b}=\vec{c}$

b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

c) Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ entonces $\vec{b}-\vec{c}$ es paralelo a $\vec{a}$

d) Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ entonces $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos a $\vec{a}$

Solución: **a)** Verdadero. **b)** Falso. **c)** Verdadero. **d)** Verdadero.

Problema 9. Determínese un vector unitario perpendicular al plano de los vectores $\vec{a} = (2,0-1)$ y $\vec{b} = (0,1,1)$. ***Solución:*** $\vec{u} = (\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

Problema 10. Hallar el vector o vectores unitarios $\vec{u}$ que forman un ángulo de 45º con el vector $\vec{a} = (2,-2,0)$ y cuyo producto vectorial $\vec{a}\times\vec{u}$ es un vector contenido en el plano *XY*.

Solución: $\vec{u}_1 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}), \vec{u}_2 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Problema 11. Sea el vector $\vec{b} = 2 sen\omega t\vec{i} + 2\cos\omega t\vec{j}$ donde t es el tiempo. ¿Qué ángulo forman $\vec{b}$ y $\frac{d\vec{b}}{dt}$? ***Solución:*** $\alpha = 90º$.

Problema 12. Determínese el valor de la derivada del producto vectorial de los vectores $\vec{v} = (3t^2,1,2)$ y $\vec{w} = (3,1,t^2)$ para t = 2. ***Solución:*** $\left.\frac{d(\vec{v}\times\vec{w})}{dt}\right|_{t=2} = (4,-96,12)$

b) Vectores deslizantes

Problema 13. Dado el vector deslizante $\vec{v} = \vec{k}$, que pasa por el origen de coordenadas, calcular:

a) Momento respecto al punto A(0,0,5)

b) Momento respecto al punto B(0,6,5)

Solución: **a)** $\vec{M}_A(\vec{v}) = 0$. **b)** $\vec{M}_B(\vec{v}) = (-6,0,0)$.

Problema 14. El vector $\vec{AB}$ está definido por los puntos A(1,3,0) y B(4,5,0). Hallar el momento de dicho vector respecto al origen de coordenadas. ***Solución:*** $\vec{M}_0(\vec{AB}) = (0,0,-7)$.

Problema 15. La recta de acción del vector deslizante $\vec{v} = (4,-3,0)$ contiene el punto P(1,2,0). Calcular la distancia del origen de coordenadas a la recta de $\vec{v}$. ***Solución:*** $d = 2{,}2$.

Problema 16. Dado el vector deslizante $\vec{v} = (\frac{1}{2},0,1)$ cuyo momento respecto al punto A(2,0,0) es $\vec{M}_A = (2,\frac{7}{2},-1)$ calcular su momento respecto al punto B(2,8,5). ***Solución:*** $\vec{M}_B(\vec{v}) = (-6,1,3)$.

Problema 17. Hallar la recta de acción del vector deslizante $\vec{a} = (1,2,2)$ si el vector momento respecto al origen de coordenadas es $\vec{M}_0(\vec{a}) = (-4,-2,0)$. ***Solución:*** $x = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$.

Problema 18. Hallar el momento respecto a punto P(1,0,-1) del vector deslizante $\vec{a} = (1,1,2)$ situado sobre la recta $x = y + 2 = \frac{z-1}{2}$. ***Solución:*** $\vec{M}_P(\vec{a}) = (-6,4,1)$.

Problema 19. Calcúlese el momento del vector $\vec{a} = (0,1,1)$ aplicado en el punto P(0,2,1) respecto a una recta que pasando por el punto Q(1,1,0) contiene el vector $\vec{b} = (1,0-1)$. ***Solución:*** $M_E = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Sistemas de vectores deslizantes

Problema 20. Dado el sistema de vectores deslizantes $(\vec{a}, A) = \{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}; (1,0,2)\}$, $(\vec{b}, B) = \{\vec{j} + \vec{k}; (1,2,1)\}$ y $(\vec{c}, C) = \{3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}; (0,0,0)\}$, calcular. a) Resultante y momento resultante en el origen de coordenadas. b) Momento resultante en el punto P(1,1,1).
Solución: **a)** $\vec{R} = (5,7,5)$; $\vec{M}_O = (-5,2,4)$. **b)** $\vec{M}_P = (-3,2,2)$.

Problema 21. Dados los vectores deslizantes $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$ y $\vec{c} = (-1,2,-2)$ aplicados respectivamente en los puntos $P_1(1,2,3)$, $P_2(-1,0,1)$ y $P_3(2,0,-1)$ hallar las ecuaciones del eje central y el valor del momento mínimo.
Solución: $\begin{matrix} 3y - 5z + x = 1 \\ 5y - 6z - 3x = 1 \end{matrix}$; $m = \frac{34}{\sqrt{14}}$.

Problema 22. El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto de un punto de su eje central tiene módulo 3, siendo 2 el módulo de la resultante. a) Determinar el automomento del sistema de vectores deslizantes. b) Si respecto de otro punto cualquiera el momento resultante forma un ángulo de 60º con la resultante, ¿cuál es su módulo? ***Solución:*** **a)** $m = 6$; **b)** $\left|\vec{M}_P\right| = \frac{3}{2}$

Problema 23. Se conocen los siguientes valores de un sistema de vectores deslizantes:

- El momento resultante respecto a la recta $x = y = z$ es $\sqrt{3}$
- El momento mínimo vale 2
- La resultante es paralela a OZ
- La componente sobre OX del momento resultante respecto al punto P(1,1,1) es dos veces su componente sobre OY
- La componente sobre OX del momento resultante respecto al origen es 2

Hallar la resultante del sistema y el momento resultante respecto al origen.

Solución: $\vec{R} = (0,0,\frac{4}{3})$; $\vec{M}_O = (2,-1,2)$.

Problema 24. El eje central de un sistema de vectores deslizantes es $x = y - 2 = z + 1$ y el momento mínimo es 2. Sabiendo que el momento resultante respecto al origen de coordenadas está contenido en el plano XZ, hallar el momento resultante respecto al punto $P(1,1,-1)$.

Solución: $\vec{M}_P = \frac{2}{\sqrt{3}}(2,2,-1)$.

Problema 25. Una plataforma cuadrada de $4 \times 4m^2$ está apoyada en sus vértices sobre cuatro columnas. Sobre dicha plataforma actúan cuatro fuerzas verticales descendentes de módulos 5N, 4N, 10N y 8N respectivamente. Se quiere sustituir las cuatro columnas por un único pilar, ¿dónde había que situarlo para que la plataforma no volcase? ***Solución:*** $P(\frac{28}{27},\frac{36}{27},0)$.

Problema 26. Consideremos el sistema de vectores deslizantes formado por los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. Obtener:

1. Un torsor en el punto $P(0,1,1)$
2. Ecuaciones del campo de momentos.

Solución: **a)** $\left\{\vec{R},\vec{M}_P\right\}=\left\{(1,1,1);(0,-1,1)\right\}$**; b)** $\vec{M}=(z-y,x-z,y-x)$.

Problema 27. De un sistema de vectores deslizantes se conoce el momento en tres puntos dados: $\left[A(3,0,0);\vec{M}_A(4,0,2)\right]$, $\left[B(0,4,0);\vec{M}_B(0,-3,2)\right]$ y $\left[C(0,0,5);\vec{M}_C(4,-3,2)\right]$. Calcular la resultante, el momento mínimo y la ecuación del eje central. ***Solución:*** $R=(0,0,1)$, $m=2$, $\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}$.

Problema 28. De un sistema de vectores deslizantes se conocen los módulos de los momentos en tres puntos $A(1,0,0)$**,** $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$ cuyos valores son iguales $|M_A|=|M_B|=|M_C|=\sqrt{35}$. El eje central del sistema es perpendicular al plano definido por los tres puntos anteriores. Si el momento del sistema respecto al eje Z vale 3. Calcular la resultante, el momento mínimo y la ecuación del eje central. ***Solución:*** $R=(2,2,2)$, $m=3\sqrt{3}$, $x=y=z$.

d) Sistemas de vectores paralelos

Problema 29. Un sistema de vectores paralelos aplicados $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ tiene por dirección común la del vector unitario $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Los módulos son respectivamente 2,4 y 6 y están aplicados en los puntos A(3,1,0), B(0,1,2) y C(4,0,1). Determinar: a) Resultante del sistema. b) El centro de vectores. c) Ecuaciones del eje central. ***Solución:*** **a)** $\vec{R}=4\sqrt{3}(1,1,1)$; **b)** $O\vec{C}=(\frac{15}{6},\frac{1}{2},\frac{7}{6})$; **c)** $x-\frac{15}{6}=y-\frac{1}{2}=z-\frac{7}{6}$.

Problema 30. Tres vectores paralelos, de módulos 1, 2 y 3 están aplicados, respectivamente, en los puntos (0,1,1), (0,2,1) y (1,1,0). Determínese su centro. ***Solución:*** $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right)$.