1.2. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

Problema 1. Un punto material se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas en función del tiempo t, expresadas en el SI, son:

$$x = t^2 + 2t + 4\ ; \qquad y = 3(t^2 + 1)\ ; \qquad z = 2t^2$$

Determinar la posición del punto material y el módulo de su velocidad en el instante $t = 2s$.

Solución: $\vec{r} = (12{,}15{,}8)m$ y $v = 15{,}63\dfrac{m}{s}$.

Problema 2. Sean las ecuaciones de un movimiento:

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = Asen\omega t$$

Deducir la ecuación de su trayectoria, las componentes cartesianas de la velocidad y su módulo.

Solución: $x^2 + y^2 = A^2$; $v_x = -A\omega sen\omega t$ y $v_y = A\omega\cos\omega t$; $v = A\omega$.

Problema 3. Un punto material se desplaza en línea recta con una velocidad $\vec{v} = (3t+5)\vec{i}\ \dfrac{m}{s}$. Para $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $P(2{,}0)$. Calcular: a) la posición de la partícula en cualquier instante. b) El desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 2s$ y $t = 5s$.

Solución: a) $\vec{r} = (\frac{3}{2}t^2 + 5t + 2)\vec{i}\,m$; b) $\Delta\vec{r} = 46.5\vec{i}\,m$.

Problema 4. Calcular la aceleración, aceleración tangencial, aceleración normal y el radio de curvatura de la trayectoria de un punto material en el instante t = 1s, si las ecuaciones de su movimiento en el plano *x, y* expresadas en el SI son:

$$x = 4sen\frac{\pi}{2}t \qquad y = 4\cos\frac{\pi}{2}t$$

Solución: $a = \pi^2\,\dfrac{m}{s^2}$; $a_t = 0$; $a_n = \pi^2\,\dfrac{m}{s^2}$; $\rho = 4m$

Problema 5. La aceleración de un punto material está definida por la ecuación $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j}\ \dfrac{m}{s^2}$. Siendo en el instante inicial el vector de posición $\vec{r} = 5\vec{i}\,m$ y su velocidad $v = 0$, determinar: a) el vector de la posición en función del tiempo, b) su trayectoria.

Solución: a) $\vec{r} = (t^2 + 5)\vec{i} + 3t^2\vec{j}$; b) $\begin{matrix} 3x - y - 15 = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$.

Problema 6. Un punto material cuya posición inicial es el origen de coordenadas tiene una aceleración de componentes $-a$ en la dirección del eje *x* y *a* en la dirección del eje *y*. Siendo la velocidad inicial v_0 en la dirección del eje *x*, determinar: a) la trayectoria del punto material, b) el instante en que el módulo de la velocidad es igual a $\sqrt{5}v_0$. ***Solución:*** a) $(x+y)^2 = \frac{2v_0^2}{a}y$; b) $t = \frac{2v_0}{a}$.

Problema 7. Un punto material se mueve sobre una línea recta con una aceleración $a = 6\sqrt[3]{x}$, medida en $\frac{m}{s^2}$ cuando *x* se mide en metros. En el instante *t = 2s*, su recorrido es *x =27 m* y su velocidad $v = 27\frac{m}{s}$. Determinar la velocidad y la aceleración del punto material cuando *t=4s*.

Solución: $v = 75\frac{m}{s}$; $a = 30\frac{m}{s^2}$.

Problema 8. La posición de un punto material que se mueve siguiente una trayectoria circular de radio *R*, está definida en función del tiempo *t* por la expresión:

$$\theta = a + bt + ct^2$$

Determinar la velocidad angular ω, la velocidad *v* y las aceleraciones angular α, tangencial a_t y normal a_n.
Solución: $\omega = b + 2ct$; $v = R(b+2ct)$; $\alpha = 2c$; $a_t = 2Rc$; $a_n = R(b+2ct)^2$.

Problema 9. Un automóvil recorre una trayectoria circular de *120m* de radio con una aceleración tangencial constante de *1 m/s²*. Calcular el espacio que habrá recorrido cuando su aceleración total sea *2 m /s²*, si su velocidad inicial es nula. ***Solución:*** *s = 103, 2 m.*

Problema 10. Un punto se mueve sobre el eje *OX* con una aceleración opuesta a su velocidad y cuyo módulo sigue la ley $a = c\sqrt{v}$, donde c es una constante positiva. Sabiendo que en *t = 0, x = 0* y $v = v_0$, calcular: a) tiempo que tarda en detenerse y b) espacio recorrido hasta la parada.

Solución: a) $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{c}$; b) $x = \frac{2\sqrt{v_0^3}}{3c}$.

Problema 11. El vector de posición de un punto es $\vec{r} = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$, donde *b* y *c* son constantes positivas. Determinar: a) ecuación de la trayectoria del punto, b) componentes intrínsecas de la aceleración y c) ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

Solución: a) $y = \frac{-cx^2}{b^2}$; b) $a_n = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2+4c^2t^2}}$, $a_t = \frac{2cb}{\sqrt{b^2+4c^2t^2}}$; c) $\alpha = \arccos\frac{2ct}{\sqrt{b_2+4c^2t^2}}$.

Problema 12. Una partícula se mueve en trayectoria plana, siendo las componentes del vector de posición de la partícula en cualquier instante $x = 2t^2 - 3$, $y = t^3 - 2t + 1$ expresadas *x* e *y* en *m* y *t* en *s*. Calcular:

a) Vectores velocidad y aceleración.

b) El vector unitario en la dirección de la tangente a la trayectoria en cualquier instante.

c) Los vectores aceleración tangencial y normal para *t = 1s*.

d) El vector unitario en la dirección normal a la trayectoria y el valor del radio de curvatura para *t = 1 s*.

Solución: a) $\vec{v} = (4t, 3t^2 - 2)$ **,** $\vec{a} = (4, 6t)$; b) $\vec{u}_t = \dfrac{4t\vec{i} + (3t^2 - 2)\vec{j}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4}}$; c) $a_t = \dfrac{22}{17}(4,1)$ **,** $a_n = \dfrac{20}{17}(-1,4)$; d) $\vec{u}_n = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(1,-4)$, $\rho = \dfrac{17\sqrt{17}}{20}\, m$.

Problema 13. La ecuación que nos define la ley horaria de una partícula en el plano OXY y referida a O como origen viene dada por $\vec{r} = (5t, 10\sqrt{3}t - 5t^2)$ queremos determinar:

a) La ecuación de la trayectoria escrita en forma explícita $y = f(x)$.

b) Expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.

c) Módulos de la aceleración tangencial y normal para *t = 1s*.

Solución: a) $y = 2\sqrt{3}x - \dfrac{1}{5}x^2$; b) $\vec{v} = (5, 10(\sqrt{3} - t))$ **,** $\vec{a} = (0, -10)$; c) $a_t = 8{,}2\dfrac{m}{s^2}$ **,** $a_n = 5{,}7\dfrac{m}{s^2}$.

Problema 14. Lanzamos hacia arriba desde la terraza de nuestra casa que dista $15m$ del suelo una pequeña pelota, con velocidad inicial de $10m/s$. Si la pelota cae finalmente a la calle: a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota respecto al suelo? b) ¿Cuánto tarda en llegar a esa altura máxima? c) ¿Qué tiempo transcurre cuando pasa de nuevo por la terraza? d) ¿En qué instante de tiempo toca el suelo? e) ¿Qué distancia total ha recorrido en su trayecto? f) ¿Con qué velocidad llega a la calle? g) ¿Cuál ha sido su velocidad media?

Solución: a) $h_{\max} = 20.1m$; b) $t_{\max} = 1.02s$; c) $t = 2.04s$; d) $t = 3s$; e) $s = 25.2m$; f) $v = 19.8m/s$; g) $v = -5m/s$ **.**

Problema 15. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra al chocar con el fondo se oye *2 s* después. (Velocidad del sonido: *340 m/s*). ***Solución:*** $h = 18{,}9m$.

Problema 16. Un móvil parte del reposo, en una vía circular de *400 m* de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los *50 s* de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de *72 Km/h,* desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

a) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.

b) La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los *50s*.

c) La velocidad angular a los *50 s*.

d) Tiempo que tardará el móvil en dar cien vueltas al circuito.

Solución: a) $a_t = 0{,}4m/s^2$; b) $a_n = 1m/s^2$, $a = 1{,}08m/s^2$; c) $\omega = 0{,}05rad/s$; d) $T = 12591s$.