1.3. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Problema 1. Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo de ecuaciones $x = y = z$, con una velocidad angular $\omega = 2\sqrt{3}\,\frac{rad}{s}$ y una aceleración angular $\alpha = \sqrt{3}\,\frac{rad}{s^2}$ en un instante determinado. Hallar la velocidad y la aceleración en un punto O del cuerpo rígido en ese instante. ***Dato:*** $\vec{r} = (2,4,1)m$.

Solución: $\vec{v}_P = (-6,2,4)\frac{m}{s}$, $\vec{a}_P = (1,-19,18)\frac{m}{s^2}$.

Problema 2. Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular variable en el tiempo *t*:

$$\vec{\omega} = (2\vec{i} - \vec{k})t^2\ \frac{rad}{s}$$

Determinar en un punto P del cuerpo, de coordenadas $(2,5,0)cm$ en el instante $t = 3\ s$: a) la velocidad, b) las aceleraciones tangencial y normal y c) el módulo de la aceleración.

Solución: a) $\vec{v}_P = (45,-18,90)\frac{cm}{s}$; b) $\vec{a}_P^{\,t} = (30,-12,60)\frac{cm}{s^2}$, $\vec{a}_P^{\,n} = (-162,-2025,-324)\frac{cm}{s^2}$;

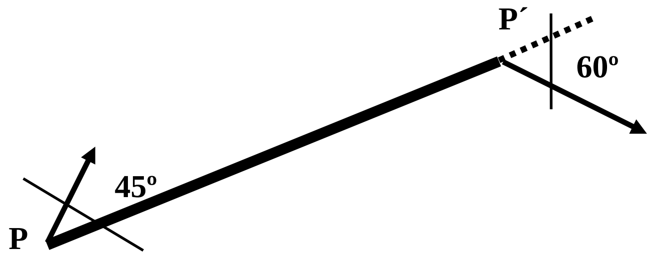
c) $a_P = 2058{,}27\frac{cm}{s^2}$.

Problema 3. Un sólido se mueve en un instante dado por efecto de las rotaciones $\vec{\omega}_1 = \vec{i} - 2\vec{k}$ y $\vec{\omega}_2 = \vec{j}$ aplicadas, respectivamente en los puntos $P_1(1,0,0)$ y $P_2(1,2,1)$. Determínese las velocidades, en dicho instante, de los puntos del sólido $0(0,0,0)$ y $P(0,2,1)$. ***Solución:*** $\vec{v}_0 = (-1,2,1)$; $\vec{v}_P = (4,1,3)$.

Problema 4. Un sólido en un instante dado está sometido a las rotaciones $\vec{\omega}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{\omega}_2 = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{\omega}_3 = -\vec{i} - \vec{k}$ aplicado respectivamente en los puntos $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$. Determínese el movimiento más sencillo a que puede reducirse el movimiento dado. ***Solución:*** movimiento de traslación con velocidad $\vec{v}_0 = (1,-1,2)$.

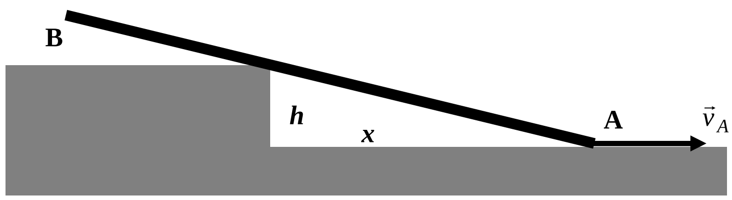
Problema 5. Los puntos $A(0,0,1)m$, $B(1,1,0)m$ y $C(0,1,2)m$ pertenecientes a un sólido, tienen las velocidades $\vec{v}_A = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\frac{m}{s}$, $\vec{v}_B = (6\vec{j} + 2\vec{k})\frac{m}{s}$ y $\vec{v}_C = (-2\vec{i} + \vec{k})\frac{m}{s}$, respecto a un sistema de ejes rectangulares. Calcular: a) la velocidad angular del sólido en ese instante, b) hallar el eje instantáneo de rotación, c) ¿se trata de una rotación pura?. ***Solución:*** a) $\vec{\omega} = (2,-1,2)$; b) $\begin{matrix} 4x - 2y - 5z = 14 \\ 5x + 2y - 4z = 21 \end{matrix}$

Problema 6. En un instante determinado una barra de *3 m* de longitud se mueve en un plano horizontal. Su extremo P tienen una velocidad de *1 m/s* y forma un ángulo de *45º* con la dirección *PP´*; sabemos también que su extremo *P´* tiene una velocidad en ese instante tal que forma un ángulo de *–60º* con la misma dirección. Se pide calcular: a) la velocidad $\vec{v}'$ del extremo *P´*; b) la velocidad angular en ese instante de todas las partículas que forman la barra y c) la posición del eje instantáneo de rotación.



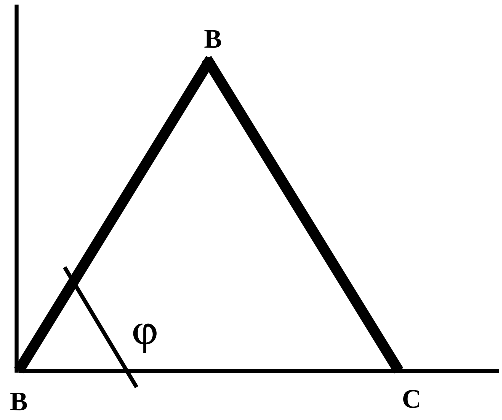
Solución: a) $\vec{v}' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$; b) $\vec{\omega} = (0, 0, \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{6})$; c) $\begin{matrix} x = \frac{3}{\sqrt{3}+1} \\ y = -\frac{3}{\sqrt{3}+1} \end{matrix}$.

Problema 7. Una barra de *3m* de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón de altura *h = 1m* . Si el extremo A, en el momento en que está separado del escalón $x = \sqrt{3}m$, tiene una velocidad $v_A = 1\frac{m}{s}$. Calcular: a) la velocidad angular de la barra en ese momento y b) la velocidad del extremo *B*.



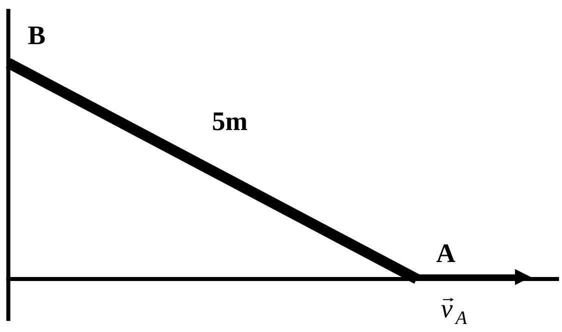
Solución: a) $\vec{\omega} = (0, 0, \frac{1}{4})$; b) $\vec{v}_B = (\frac{5}{8}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}, 0)$ **.**

Problema 8. Dos barras de *1m* de longitud están unidas en *B* por una bisagra como indicamos en la figura estando apoyadas en el suelo y el extremo *A* en una pared (*A* es un punto fijo); se deja el sistema en libertad y cuando $\theta = 20^{o}$ la velocidad angular de la barra *AB* es $\omega = 0.2\frac{rad}{s}$. Determinar la velocidad del extremo *C* de la barra *BC*.



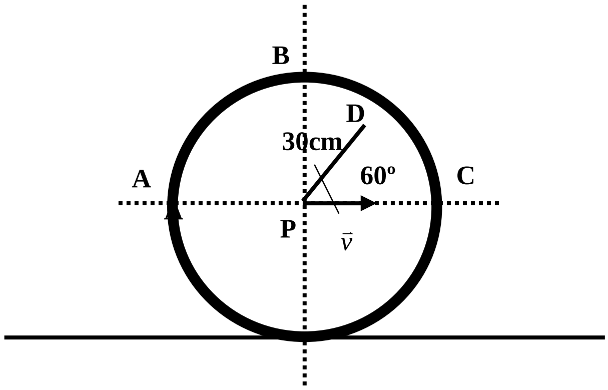
Solución: $\vec{v}_C = (0.4 sen 20^{o}, 0, 0)$.

Problema 9. Una escalera de mano de *5m* de longitud se apoya sobre una pared vertical y el suelo horizontal, rebasada la posición de equilibrio comienza a caer de forma que en un momento determinado la velocidad del extremo que se arrastra por el suelo y que se encuentra a *4m* de la pared es de *2m/s* y su aceleración de $-1 m/s^2$. Se pide calcular en ese instante: a) la velocidad y aceleración del otro extremo y b) la velocidad y aceleración del punto medio de la escalera.



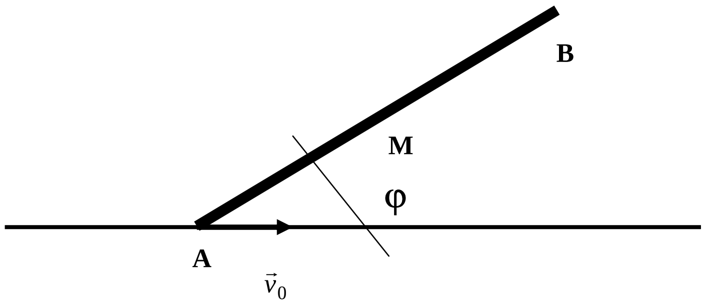
Solución: a) $\vec{v}_B = (0, -\frac{8}{3}, 0)$, $\vec{a}_B = (\frac{16}{9}, -\frac{28}{27}, 0)$; b) $\vec{v}_C = (1, -\frac{4}{3}, 0)$, $\vec{a}_C = (\frac{23}{18}, \frac{4}{27}, 0)$.

Problema 10. Un disco de radio $R = 1m$ rueda sin deslizar por un plano horizontal y en un instante dado, su centro *P* tiene una velocidad de $10m/s$ en la dirección indicada en la figura. Se pide: a) determinar cuál es el eje instantáneo de rotación y b) calcular la velocidad de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* que se indican en la figura.



Solución: a) $\begin{matrix} x = x_0 \\ y = 0 \end{matrix}$; b) $\vec{v}_A = (10{,}10{,}0)$, $\vec{v}_B = (20{,}0{,}0)$, $\vec{v}_C = (10,-10{,}0)$, $\vec{v}_D = (10 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$.

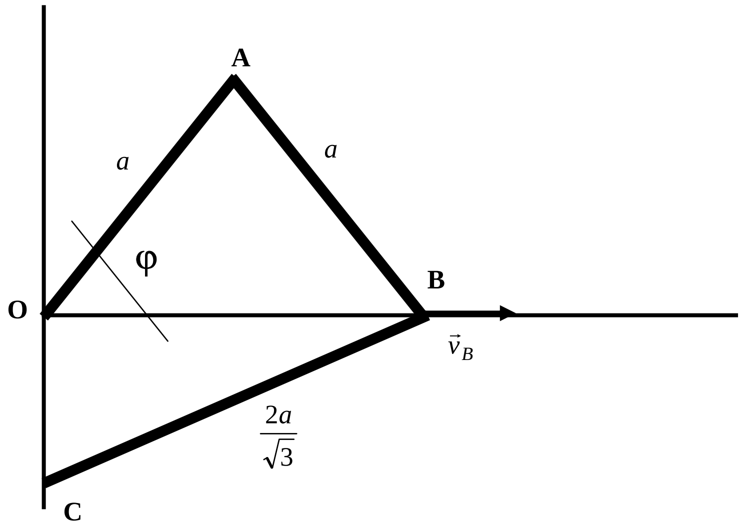
Problema 11. Una barra *AB* de longitud *2b*, se mueve en un plano de manera que su extremo *A* recorre el eje *OX* con velocidad uniforme $\vec{v}_0$ mientras que su punto medio *M* tiene siempre la velocidad contenida en la dirección de la barra. En función de v_0, *b* y φ determínese: a) velocidades de *M* y *B*, b) velocidad y aceleración angulares de la barra y c) coordenadas del centro instantáneo de rotación.



Solución: a) $\vec{v}_M = (v_0 \cos^2\varphi, v_0 \cos\varphi sen\varphi, 0)$, $\vec{v}_B = (v_0 - 2b\omega sen\varphi, 2b\omega\cos\varphi, 0)$ siendo $\omega = \frac{v_0 sen\varphi}{b}$;

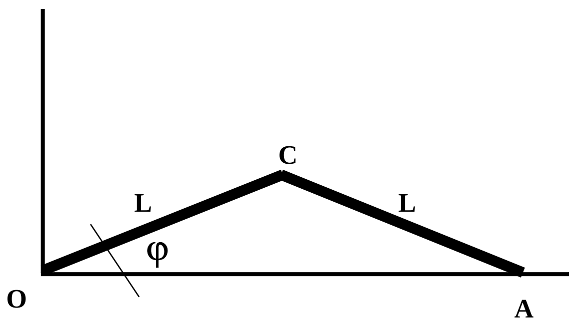
b) $\vec{\omega} = (0,0,\frac{v_0 sen\varphi}{b})$, $\vec{\alpha} = (0,0,\frac{v_0^2 sen\varphi\cos\varphi}{b^2})$; c) $\begin{matrix} x = 0 \\ y = \dfrac{b}{sen\varphi} \end{matrix}$.

Problema 12. Considérese el conjunto de las tres varillas de la figura, contenidas en un plano y articuladas entre sí. Dos de ellas, *OA* y *AB*, tienen igual longitud a y la tercera *BC*, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. La varilla *OA* puede girar en torno de *O* y los extremos *B* y *C* deslizan sobre los ejes coordenados. Suponiendo que B se mueve con velocidad constante v_B y que en el instante inicial $\varphi = 60^o$, determínese: a) las velocidades iniciales de los extremos *A* y *C*, b) el centro instantáneo de rotación de la varilla *AB* y c) la velocidad angular de dicha varilla.



<u>*Solución:*</u> a) $\vec{v}_A = (\frac{v_B}{2}, -\frac{\cos\varphi}{sen\varphi} v_B, 0)$, $\vec{v}_B = (0, v_B\sqrt{3}, 0)$; b) $\begin{matrix} x = a \\ y = 2asen\varphi \end{matrix}$; c) $\vec{\omega} = (0,0,\frac{v_B}{2asen\varphi})$.

Problema 13. La barra *OC* de longitud *L* gira alrededor de *O* con velocidad angular constante ω en sentido antihorario. El extremo *C* se articula *AC*, de igual longitud *L*. El extremo *A* de dicha barra está obligado a deslizar sobre un eje horizontal que pasa por *O*. Calcular: a) velocidad y aceleración del extremo *A* de la barra *AC*, b) velocidad angular de dicha barra en el instante en que la barra *OC* forma un ángulo de *60º* con la dirección horizontal.



<u>*Solución:*</u> a) $\vec{v}_A = (-2L\omega sen\varphi, 0, 0)$, $\vec{a}_A = (-2L\omega^2 \cos\varphi, 0, 0)$; b) $\vec{\omega} = (0,0,-\omega)$.

Problema 14. Un triángulo isósceles (la longitud de los dos lados iguales es *l*) y rectángulo en A se mueve de la siguiente manera:

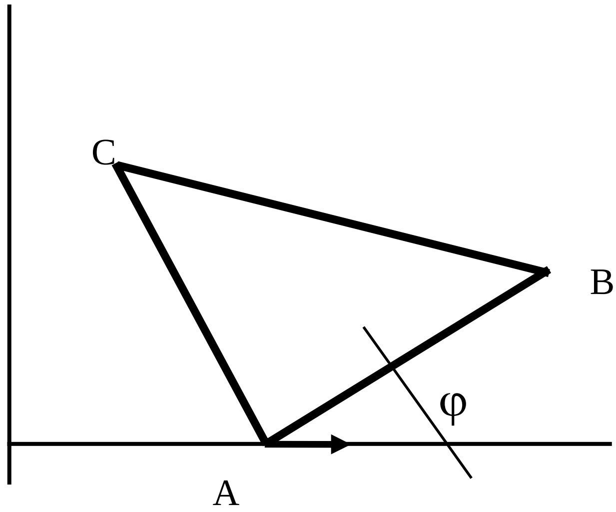
1. El vértice A describe el eje OX con un movimiento uniforme de velocidad v_0.
2. Las aceleraciones de los vértices B y C son constantes en módulo y son iguales a a.
3. La velocidad angular del triángulo (dato desconocido) es constante.
4. En el instante inicial los dos lados iguales coinciden con los ejes coordenados.

Determinar:

(a) Dirección y sentido de las aceleraciones de B y C.

(b) La velocidad angular de la rotación del triángulo y el centro instantáneo de rotación si el giro es antihorario.

(c) Trayectoria del vértice B.



Solución: a) $\vec{u}_{a_B} = \vec{u}_{a_C} = (-\cos\varphi, -sen\varphi, 0)$; b) $\vec{\omega} = (0,0,\sqrt{\frac{a}{l}})$, $CIR(v_0 t, \frac{v_0}{\omega}, 0)$;

c) $\vec{r}_B = \frac{1}{\omega}(v_0\varphi + l\cos\varphi, l sen\varphi, 0)$.